Тәжірибелік сабақ

Тақырып 8. Нақты сандар жиыны. Функция ұғымы және негізгі қасиеттері. Тізбек шегі және оның қасиеттері. Функция шегі және оның қасиеттері.

1. Бір айнымалы функциялар

1. $y=\arcsin x \Rightarrow D=[-1;1]$ - тұйықталған облыс,

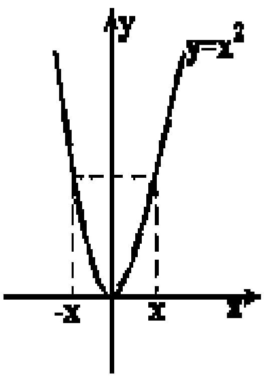
2. $y=\ln x \Rightarrow D=(0;\infty)$ - ашық шексіз облыс.

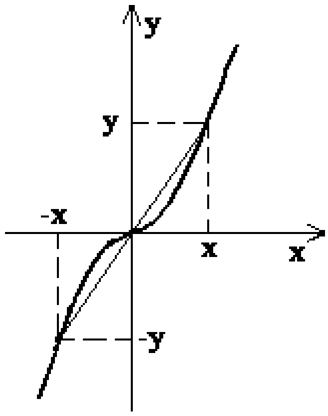
3. $y=\lg\left(4-3x-x^2\right)$ функциясының анықталу облысы мен мәндерінің облысын тап.

Логарифмдік функцияның қасиеті бойынша, берілген функция $4-3x-x^2>0$ болған жағдайда ғана анықталады. Бұл квадрат үшмүшеліктің түбірлері: $x_1=-4,\ x_2=1$. Ендеше, жоғарыда жазылған теңсіздікті былай жаза аламыз: $-(x+4)(x-1)>0$ және бұл теңсіздіктің шешімдері $x>-4$ және $x<1$. Сонымен, берілген функцияның анықталу облысы $D:(-4;1)$. D облысында $0<4-3x-x^2\le 25/4$ болғандықтан, $(-\infty;\lg(25/4))$ интервалы берілген функцияның мәндер облысы E болады.

2. Жұп функцияның графигі Oy осіне қарағанда симметриялы, ал тақ функцияның графигі координаталардың бас нүктесіне қарағанда симметриялы.

2. $y=x^2$ - жұп функция, ал $y=x^3$ - тақ функция.





E $-y$-тің өзгеру облысы, ал D - $y=f(x)$ функциясының анықталу облысы болсын.

3. Сан тізбегінің шегін есептеу керек. $\lim \dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$

Шешуі. n→ ∞ ұмтылғанда бөлшектің алымы мен бөлімі шексіз үлкен шамалар және анықталмағандықтың түрі $\dfrac{\infty-\infty}{\infty}$. Алымы мен бөлімін n-нің үлкен дәрежесі n^2-на бөліп,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2-n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2-\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}=\frac{1-1}{1}=0$$

аламыз.

4. Сан тізбегінің шегін есептеу керек.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$$

Шешуі. $n\to\infty$ ұмтылғанда анықталмағандықтың түрі $\infty(\infty-\infty)$. Жақша ішіндегі өрнектің түйіндесіне көбейтіп, бөліп

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)\left(\sqrt{n^3-3}+\sqrt{n^3-2}\right)}{\left(\sqrt{n^3-3}+\sqrt{n^3-2}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(n^3-3-n^3+2\right)}{\sqrt{n^3-3}+\sqrt{n^3-2}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n^3-3}+\sqrt{n^3-2}}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{\sqrt{n^3-3}}{n^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\sqrt{n^3-2}}{n^{\frac{3}{2}}}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{n^3}}}{\sqrt{\dfrac{n^3-3}{n^3}}+\sqrt{\dfrac{n^3-2}{n^3}}}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+2}{n}}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{n^3}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n^3}}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}}{2}=-\frac{1}{2},$$

және $n\to\infty$ үшін $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{2}{n}$ шамалары 0-ге ұмтылатынын ескеру қажет.

5. Сан тізбегінің шегін есептеу керек: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}+1}$

Шешуі.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}}\cdot\left(\frac{n+5}{n-7}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+5}{n-7}-1\right)^{\frac{n}{6}}\cdot\left(\frac{\dfrac{n+5}{n}}{\dfrac{n-7}{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+5-n+7}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}}\cdot\frac{1+\dfrac{5}{n}}{1-\dfrac{7}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[(1+\frac{12}{n-7})^{\frac{n-7}{12}}\right]^{\frac{12}{n-7}\cdot\frac{n}{6}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2n}{n-7}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n-7}{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2}{1-\frac{7}{n}}}=e^2$$

және $n\to\infty$ үшін $\dfrac{5}{n}$, $\dfrac{7}{n}$ шамалары 0-ге ұмтылатынын ескеру қажет.

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=e$ түріндегі 2-ші тамаша шекті қолдандық .

6. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}} \dfrac{15x^2-2x-1}{x+\dfrac{1}{5}} = -8$ теңдігін дәлелде. ($\delta(\varepsilon)$ шамасын табу қажет).

Шешуі. x_0 нүктесіндегі $y=f(x)$ функция шегінің анықтамасын қолданамыз: Егер $\forall\varepsilon>0$ үшін $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ саны табылып, $\forall x\in X,\ 0<|x-x_0|<\delta$ үшін $|f(x)-A|<\varepsilon$ болса, онда A саны $y=f(x)$ x_0 нүктесіндегі шегі болатындықтан, біздің есепте $f(x)=\dfrac{15x^2-2x-1}{x+\dfrac{1}{5}}$,

$x_0=-\dfrac{1}{5}$, $A=-8$. Біздің мақсатымыз: $\left|x-\left(-\dfrac{1}{5}\right)\right|=\left|x+\dfrac{1}{5}\right|<\delta$ теңсіздігінен

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x+\dfrac{1}{5}}-(-8)\right|=\left|\frac{15x^2-2x-1}{x+\dfrac{1}{5}}+8\right|<\varepsilon$$ теңсіздігін қанағаттандыратын

ε -ға байланысты δ санының , яғни, $\delta=\delta(\varepsilon)$ табылатынын көрсету.

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x+\dfrac{1}{5}}+8\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{15\left(x+\dfrac{1}{5}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{x+\dfrac{1}{5}}+8\right|<\varepsilon\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow\left|15\left(x-\frac{1}{3}\right)+8\right|<\varepsilon\Leftrightarrow|15x-5+8|<\varepsilon\Leftrightarrow|15x+3|<\varepsilon\Leftrightarrow 15\left|x+\frac{1}{5}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|x+\frac{1}{5}\right|<\frac{\varepsilon}{15},$$

Ендеше кез- келген $\varepsilon>0$ саны үшін $\delta=\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{15}$ табылды. Теңдік дәлелденді.

Жауабы: кез-келген $\varepsilon>0$ үшін $\delta=\dfrac{\varepsilon}{15}$ табылды.

7. Функцияның шегін табыңыз: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$

Шешуі.

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}=/\left(\frac{-27+63-45+9}{-27+72-63+18}\right)=\left(\frac{72-72}{90-90}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)/=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+3x^2+4x^2+12x+3x+9}{x^3+3x^2+5x^2+15x+6x+18}=\lim_{x\to-3}\frac{x^2(x+3)+4x(x+3)+3(x+3)}{x^2(x+3)+5x(x+3)+6(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+4x+3}{x^2+5x+6}=\left(\frac{9-12+3}{9-15+6}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{x^2+3x+x+3}{x^2+3x+2x+6}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x(x+3)+(x+3)}{x(x+3)+2(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x+1}{x+2}=\frac{-3+1}{-3+2}=2$$

8. Функцияның шегін табыңыз: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

Шешуі.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)\sqrt[3]{x^2-9}}$$

$$\frac{1}{8}\lim_{x\to 3}\frac{x+13-4x-4}{\sqrt[3]{x^2-9}}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 3}\frac{-3x+9}{\sqrt[3]{x^2-9}}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}}=$$

$$=\frac{-3}{8}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x+3}}=-\frac{3}{8}\frac{0}{\sqrt[3]{6}}=0.$$